

## Determinação de Parâmetros de uma Máquina de Relutância Variável

Murillo V. Santos, Célio C. L. Filho, Jan A. R. Ribeiro,  
Camila D. Jesus & Márcio J. Dias

Esse trabalho tem como objetivo estudar os parâmetros primordiais de uma máquina de relutância variável por meio do método analítico e uma simulação dinâmica com o auxílio do software MATLAB/SIMULINK. As respostas obtidas por meio destes dois métodos devem se apresentar muito próximas e exatas.

**Palavras-chave:** *máquina elementar a relutância; MATLAB/SIMULINK; torque; indutância.*

**Abstract -** This work aims to study the primordial parameters of a variable reluctance machine through the analytical method and a dynamic simulation with the aid of the MATLAB / SIMULINK software. The answers obtained through these two methods, must be very close and accurate.

**Keywords:** *elementary reluctance machine; MATLAB / SIMULINK; torque; inductance.*

## Introdução

A Máquina Elementar a Relutância ou Máquina de Relutância Variável (MRV) é talvez a mais simples das máquinas pois apresenta uma construção não tão complexa quanto o seu controle. Ela recebe este nome pois o seu funcionamento se baseia na variação do valor da indutância no estator em função da posição angular do rotor<sup>1</sup>.

Os primeiro modelo de um motor de relutância foi desenvolvido por volta de 1833<sup>2</sup>. Naquela época, ainda não existia uma tecnologia sofisticada que garantisse o controle preciso de velocidade das máquinas elétricas. Mas na década de 70, houve grande desenvolvimento de dispositivos semicondutores que impulsionaram a sua utilização no controle das máquinas elétricas.

Com isso ocorreu grande demanda de máquinas de relutância variável para aplicações de tração elétrica e acionamentos devido ao controle preciso que fornecia velocidade e torque necessários<sup>2</sup>. Mas esses dispositivos semicondutores apresentavam custos altíssimos para aquela época e eram uma barreira para o aumento na produção destas máquinas de relutância.

As vantagens de não apresentar enrolamentos, escovas e ímãs no rotor, estrutura simples e robusta, e baixo custo com a manufatura (quando comparada às outras máquinas elétricas), além de uma redução vertiginosa nos preços de equipamentos de eletrônica de potência; fizeram com que a MRV chamasse a atenção de vários pesquisadores e empresas ao redor do mundo, aplicando-a principalmente ao uso de bombas, carros elétricos e pequenas utilidades domésticas<sup>3</sup>.

Por meio dos inúmeros estudos realizados com a MRV<sup>4,6</sup>, foi possível desenvolver um modelo matemático no qual se possa obter uma simulação computacional desta máquina. Todo o comportamento desta máquina pode ser determinados por meio de equações dinâmicas: torque, tensão no estator, posição do rotor, corrente no estator, entre outros. Neste trabalho, se utilizam-se estas equações para gerar uma simulação de uma MRV. Os resultados obtidos com esta simulação serão comparados com os resultados obtidos por meio de cálculo analítico, a fim de verificar se

os dois modelos são exatos. Para todos os estudos que são realizados neste trabalho, utiliza-se a MRV da Figura 1 que apresenta como carga, uma mola presa ao seu rotor.

Na próxima seção, ocorre a apresentação dos cálculos analíticos dos parâmetros da MRV, na seção 3 ocorre a simulação dinâmica da máquina e apresentação dos resultados, e por último, a conclusão do trabalho.

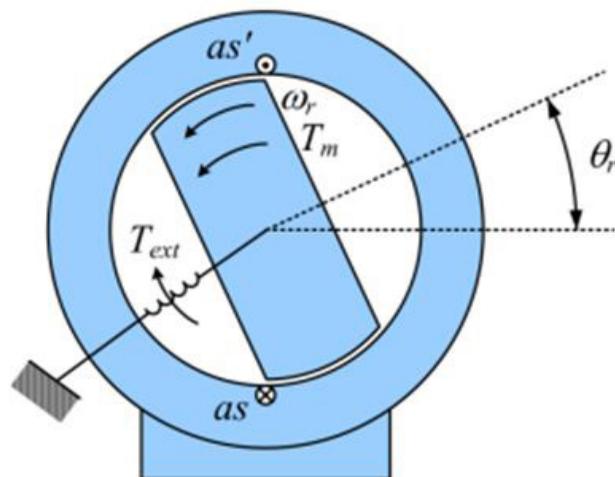


Figura 1: Máquina Elementar à Relutância com rotor preso a um mola.

## Cálculos Analíticos

Na Figura 1, é apresentado um sistema eletromecânico no qual a relutância da MRV varia conforme ocorre a movimentação do rotor em relação ao eixo magnético. O rotor está em repouso e preso por uma mola que limita a sua movimentação. O rotor da máquina apresenta uma inclinação em relação ao eixo magnético devido à força que a mola exerce sobre este, evitando que eles venham a se alinhar.

Uma fonte de tensão contínua é então fornecida ao enrolamento da máquina para uma análise do seu comportamento com esta mudança. A primeira análise define-se no regime permanente da máquina, por meio das equações diferenciais que modelam todo o desempenho dos seus parâmetros.

Os cálculos analíticos dos parâmetros da MRV apresentada na Figura 1, constituem-se dos seguintes dados:

1. Indutância de magnetização ( $L_m$ ) =  $0,3 - 0,05 \cos 2\theta$  (H);
2. Indutância de dispersão ( $L_s$ ) = 0,1 (H);
3. Torque resistente da mola ( $T_{ext}$ ) =  $0,062 (\theta_r - 3\pi/8)$  (Nm);
4. Tensão no estator ( $V_{as}$ ) = 8 V;
5. Resistência da bobina ( $R_s$ ) =  $10 \Omega$ .

Com estas informações deve-se calcular inicialmente a corrente na bobina do estator e a posição final de equilíbrio do rotor, em regime permanente, com a aplicação de uma tensão contínua no estator de 8 V. A Equação (1) é utilizada para representação da tensão na bobina do estator.

$$V_{as}(t) = R_s i_{as}(t) + [L_{ls} + L_A - L_B \cos 2\theta_r] \frac{di_{as}(t)}{dt} + 2L_B \omega_r(t) i_{as}(t) \sin 2\theta_r \quad (\text{Eq. 01})$$

A frequência angular  $\omega_r$  é a derivada do ângulo teta em relação ao tempo e por isso pode-se fazer essa substituição em (1).

$$V_{as}(t) = R_s i_{as}(t) + [L_{ls} + L_A - L_B \cos 2\theta_r] \frac{di_{as}(t)}{dt} + [2L_B i_{as}(t) \sin 2\theta_r] \frac{d\theta_r(t)}{dt} \quad (\text{Eq. 02})$$

Esta análise se realiza no regime permanente, ou seja, o estudo visa ao comportamento da máquina após o regime transitório. Decorrido certo tempo após a alimentação da máquina pela fonte de corrente contínua, as derivadas em relação ao tempo em (2) devido o tempo que vai aumentando a cada instante. De uma forma matemática, pode-se dizer que o tempo “tende ao infinito”, e as derivadas serão nulas. A Equação (3) apresenta o resultado obtido após a anulação das derivadas.

$$V_{as}(t) = R_s i_{as}(t) \quad (\text{Eq. 03})$$

Como a tensão aplicada no estator é contínua, o valor da sua amplitude não varia no tempo e, logicamente, a corrente também terá o mesmo comportamento. Desta forma, calcula-se a corrente no enrolamento da máquina.

$$V_{as} = R_s i_{as} \rightarrow 8 = 10 i_{as} \rightarrow i_{as} = 0,8 \text{ A} \quad (\text{Eq. 04})$$

Após poucos segundos que a máquina sai da inércia, com uma tensão de 8 V aplicada em seu estator, ela necessitará de uma corrente elétrica de 0,8 A para continuar a se movimentar.

O próximo passo é o cálculo da posição final de equilíbrio do rotor que é a posição angular onde os torques, resistente e mecânico, são iguais. Para este cálculo utiliza-se a segunda Lei de Newton aplicada à sistemas de rotação.

$$J \frac{d\omega_r(t)}{dt} = T_{ext} - T_m - k_v \omega_r \quad (\text{Eq. 05})$$

1. Momento de inércia ( $J$ ) =  $2 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ;
2. Coeficiente de atrito ( $K$ ) =  $0,004 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$  ;
3. Posição inicial do rotor ( $\theta_0$ ):  $\frac{\pi}{2}$ .

Todos estes parâmetros devem ser utilizados para o cálculo da posição final de equilíbrio do rotor da máquina. Como esta análise é feita para o regime permanente, novamente as derivadas tendem a zero na mesma proporção que o tempo tende ao infinito. Logo, (5) pode ser escrita como:

$$J \frac{d\omega_r(t)}{dt} = T_{ext} - T_m - k_v \frac{d\theta_r(t)}{dt} \quad (\text{Eq. 06})$$

$$0 = T_{ext} - T_m - 0 \rightarrow T_{ext} - T_m = 0 \rightarrow T_{ext} = T_m \quad (\text{Eq. 07})$$

$$-0,062 \left( \theta_r - \frac{3\pi}{8} \right) = L_B i_{as}^2 \sin(2\theta_r) \quad (\text{Eq. 08})$$

Substituindo em (8) todos os valores que já foram dados e calculados anteriormente para o período em regime, pode-se calcular o ângulo teta.

$$-0,062\left(\theta_r - \frac{3\pi}{8}\right) = 0,05 \times (0,8)^2 \sin(2\theta_r) \quad (\text{Eq. 09})$$

$$-0,062\theta_r + 0,073 = 0,032 \times \sin(2\theta_r) \quad (\text{Eq. 10})$$

$$-0,062\theta_r + 0,073 - 0,032 \times \sin(2\theta_r) = 0 \quad (\text{Eq. 11})$$

Deve-se resolver (11), encontrando uma raiz que satisfaça à equação, sendo o valor de  $\theta_r$ , a posição final de equilíbrio da máquina. Utilizando o MATLAB para resolver este problema, calcula-se um valor de  $\theta_r$  igual a 0,674 rad, ou 38,62°. A Figura 2 apresenta a resolução de (11).

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> solve(' -0,062*x+0,073-0,032*sin(2*x)', 'x')
ans =
0.67403850088277325615299166845451
fz >> |
    
```

Figura 2: Cálculo de raiz pelo MATLAB.

Uma vez que todos os parâmetros intrínsecos à MRV foram calculados pelo método analítico, inicia-se a simulação dinâmica desta máquina para futura comparação entre ambos os métodos.

### SIMULAÇÃO DINÂMICA

Para a simulação da MRV, utiliza-se o SIMULINK/MATLAB que é um software utilizado largamente em simulações dinâmicas. As equações (2) e (5) representam todas as características intrínsecas à esta máquina e por isso sua representação realiza-se em diagramas de blocos. Para facilitar a simulação isolam-se as derivadas de (2) e (5) a fim de utilizar o bloco integrador no SIMULINK para o cálculo dos seus valores reais.

$$\frac{di_{as}(t)}{dt} = \frac{V_{as}(t) - R_s i_{as}(t) - 2L_B \omega_r(t) i_{as}(t) \sin 2\theta_r}{L_s + L_A - L_B \cos 2\theta_r} \quad (\text{Eq. 12})$$

$$\frac{d\omega_r(t)}{dt} = \frac{T_{ext} - T_m - k_v \omega_r}{J} \quad (\text{Eq. 13})$$

Sabe-se também que a frequência angular  $\omega_r$  é igual à derivada do ângulo teta em relação ao tempo, logo esta derivada deverá ser utilizada também como uma variável para a simulação do sistema.

$$\omega_r(t) = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (\text{Eq. 14})$$

Aplicando uma tensão contínua de 8 V no enrolamento situado no estator da máquina, calcula-se uma corrente de 0,8 A na bobina, no regime permanente. Este valor se confirma nas Figuras 4 e 5 que mostram o valor da corrente da simulação com todos os parâmetros que foram dimensionados. A corrente alcança um valor de pico de 0,8252 A e após 0,4 segundos, ela se estabiliza em 0,8 A já no regime permanente.

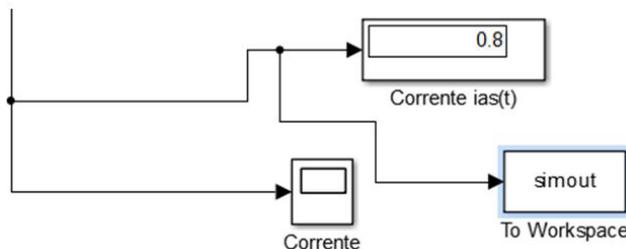


Figura 4: Valor simulado da corrente no estator da bobina no regime permanente.

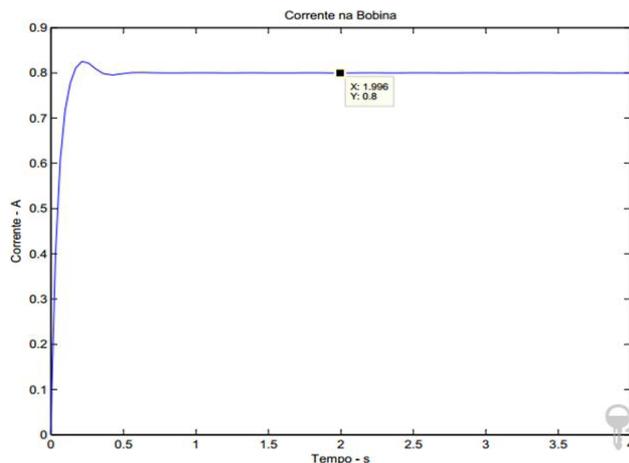
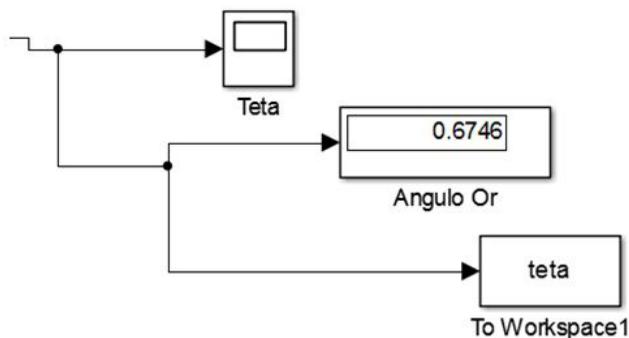
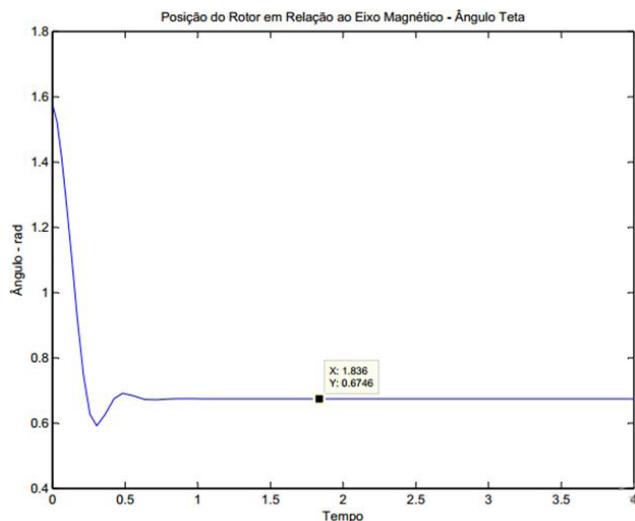


Figura 5: Gráfico da corrente.

Pelo método analítico, calculou-se um ângulo teta de 0,674 rad (38,62°) no qual o torque resistente e o torque mecânico são iguais e por isso a máquina para de girar alcançando uma posição de equilíbrio. As Figuras 6 e 7 apresentam os resultados obtidos pela simulação. Estipulou-se uma condição inicial para essa simulação em que o ângulo teta inicial equivale a 90° ou 1,571 radianos. Na Figura 7 se vê claramente que o gráfico inicia-se neste mesmo valor.

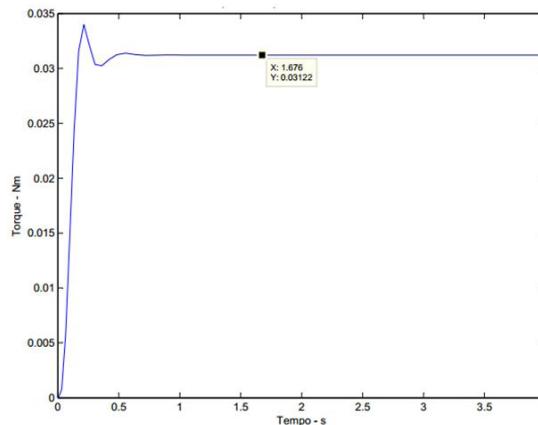


**Figura 6:** Valor simulado do ângulo teta final.



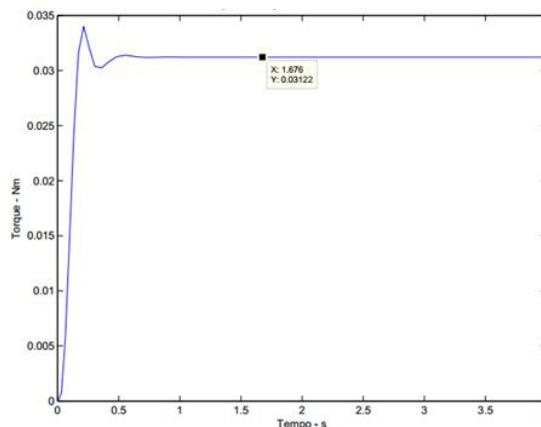
**Figura 7:** Gráfico da posição angular do rotor.

A Figura 8 apresenta o gráfico da frequência angular do rotor que sai da inércia e começa a se movimentar em relação ao eixo magnético. Quando o torque da máquina se iguala ao torque resistente da mola, o rotor volta novamente ao repouso, posicionando-se 38,62° em relação ao eixo magnético.



**Figura 8:** Frequência angular do rotor.

A Figura 9 exibe o comportamento do torque conforme a máquina vai saindo da inércia até alcançar o regime permanente. Vê-se claramente que o torque se estabiliza e permanece constante com um valor de 0,03122 N.m pois o sistema está em equilíbrio e o torque da máquina é igual ao torque resistente.



**Figura 9:** Torque da MRV.

O torque resistente apresenta um valor de  $-0.02434$  N.m quando  $\theta_r$  é igual a  $90^\circ$  (condição inicial) e conforme a máquina se movimenta, ele alcança o valor  $0,03122$  N.m no regime permanente. Esse fato se comprova por meio da Figura 10 que mostra o comportamento do torque resistente da mola.

Já a Figura 11 apresenta o valor calculado do torque resistente pelo SIMULINK para a condição inicial (em que a bobina do estator não está alimentada pela tensão) e no regime permanente (quando o torque da mola e o torque da máquina estão equilibrados), respectivamente.

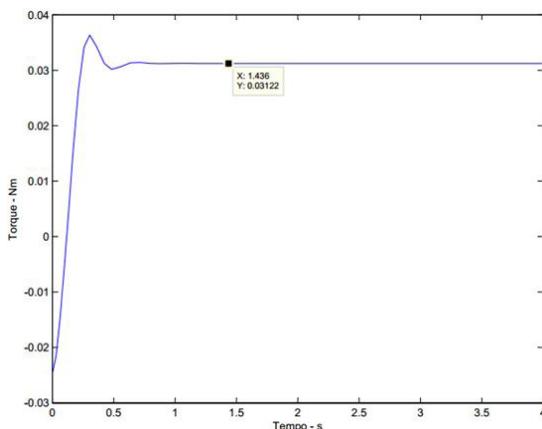


Figura 10: Torque Resistente da Mola.



Figura 11: Torque resistente inicial e final da mola.

## Conclusão

Conclui-se por meio dos resultados obtidos que o modelo analítico representativo da máquina de relutância variável é exato e pode ser utilizado para qualquer estudo que visa à análise dos parâmetros desta máquina rotativa.

A simulação dinâmica mostrou-se muito eficiente e mais completa do que o modelo analítico, pois se pode analisar o comportamento de qualquer variável da máquina, tanto no tempo transitório quanto no regime permanente.

Desta forma, pode-se analisar outras variáveis da máquina como por exemplo a relação entre o fluxo magnético na bobina e a indutância de magnetização.

É possível analisar também a variação de todos os parâmetros estudados na operação da máquina, com a variação no módulo da tensão contínua que é aplicada ao enrolamento da MRV.

## Referências

1. Umans, Stephen D. Máquinas Elétricas – de Fitzgerald e Kingsley. 7ª ed., AMGH Editora Ltda., Porto Alegre, 2014.
2. T. J. E. Miller. Electronic Control of Switched Reluctance Machines.
3. Newnes Power Engineering Series. (2001).
4. K. A. Joseph. Opportunities for switched reluctance motor-drives. Pulp and Paper Industry Technical Conference, 1999. Conference Record of 1999 Annual, 1999, pg. 42-47.
5. M.R. Harris, T.J.E. Miller. Comparison of Design and Performance Parameters in Switched Reluctance and Induction Motors. Electrical Machines and Drives, 1989. Fourth Internacional Conference on 1989, pp. 303-307.
6. Hassan Moghbelli, Gayle E. Addams and Richard G. HOFT. Performance of a 10-Hp Switched Reluctance Motor and Comparison with Induction Motors. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 21, no 3, May/June 1991.
7. Torrey, D. A. Switched reluctance generators and their control”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 49, issue 1, Feb. 2002., pp. 3-14.

**Murillo V. Santos\*<sup>1</sup>, Célio C. L. Filho<sup>1</sup>, Jan A. R. Ribeiro<sup>1</sup>, Camila D. Jesus<sup>2</sup> & Márcio José Dias<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Goiás

<sup>2</sup>Instituto Federal Goiano

<sup>3</sup>Centro Universitário de Anápolis – UniEVANGÉLICA. Avenida Universitária, km 3,5, Centro Universitário, Anápolis, Goiás, Brasil.

\*E-mail: murisantosifg@gmail.com